Corrigé

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

Exercice 1

Etudier l'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 3x^2 - x - 5$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 4x + 1$.

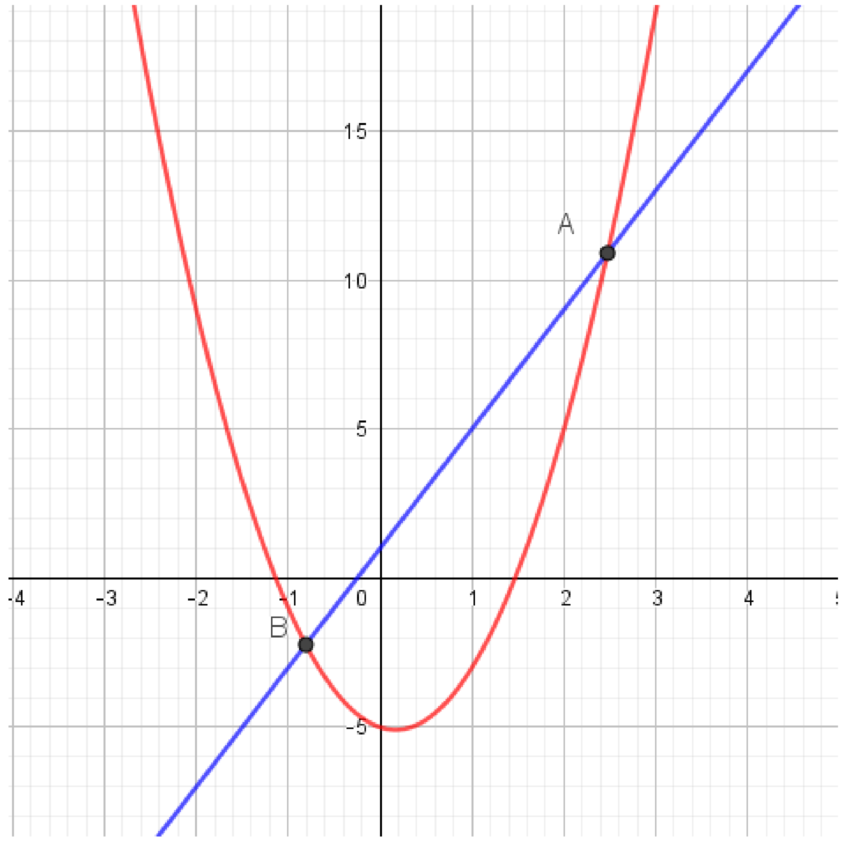
Corrigé Exercice 1

$$
\begin{aligned}
M(x.y) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} M(x.y) & \in & \mathcal{P} \\ M(x.y) & \in & \mathcal{D} \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcc} y & = & 3x^2 - x - 5 \\ y & = & 4x + 1 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 4x + 1 & = & 3x^2 - x - 5 \\ y & = & 4x + 1 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} -3x^2 + 5x + 6 & = & 0 \\ y & = & 4x + 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Résolvons en premier lieu l'équation $-3x^2 + 5x + 6 = 0$.
Posons $a = -3$, $b = 5$ et $c = 6$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 97$. Puisque $\Delta > 0$, le polynôme $-3x^2 + 5x + 6$ admet deux racines :

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{97}}{-6} = \frac{5 + \sqrt{97}}{6} \sim 2.47 \\
s' &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{97}}{-6} = \frac{5 - \sqrt{97}}{6} \sim -0.80
\end{aligned}
$$

En conclusion, l'intersection de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 3x^2 - x - 5$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 4x + 1$ est constituée des deux points $A(s; 4s + 1)$ et $B(s'; 4s' + 1)$.
Vérification graphique.



15
10
5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
A
B

Exercice 2

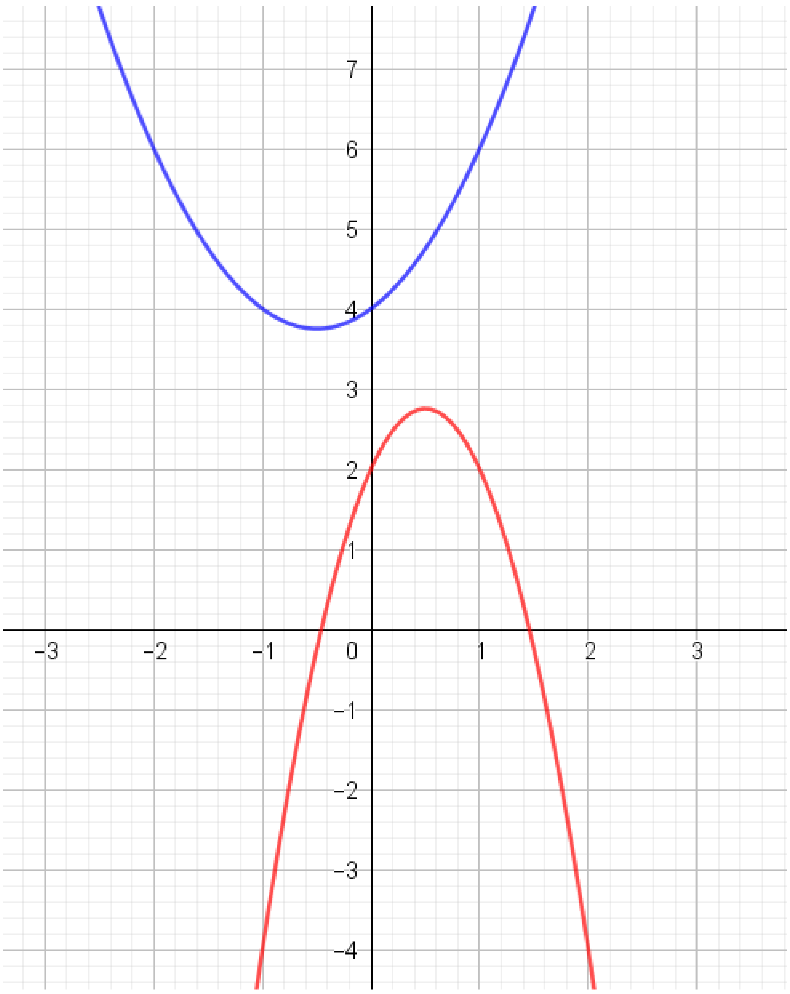
Etudier les positions relatives de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -3x^2 + 3x + 2$ et de la parabole $\mathcal{P}'$ d'équation $y = x^2 + x + 4$.

Corrigé Exercice 2

Etudions lorsque la parabole $\mathcal{P}$ est « au-dessous » de la parabole $\mathcal{P}'$.

$$\begin{aligned} -3x^2 + 3x + 2 \leq x^2 + x + 4 &\iff -4x^2 + 2x - 2 \leq 0 \\ &\iff -2x^2 + x - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Etudions le signe de $-2x^2 + x - 1$. Posons $a = -2$, $b = 1$ et $c = -1$.
Le discriminant de $-2x^2 + x - 1$ est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = -7$. Puisque $\Delta < 0$, le signe de $-2x^2 + x - 1$ est fixe et est le signe de $a = -4$ c'est-à-dire $-$.
Ainsi, $-2x^2 + x - 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$, de telle sorte que la parabole $\mathcal{P}$ est strictement « au-dessous » de la parabole $\mathcal{P}'$.
Vérification graphique.



Exercice 3

Montrer qu'une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre le point A de coordonnées $(-2;1)$ et de rayon 5 est $(x+2)^2+(y-1)^2 = 25$ puis étudier l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x+3$.

Corrigé Exercice 3

• Déterminons une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre le point A de coordonnées $(-2;1)$ et de rayon 5. Soit $M(x;y)$ un point du plan de coordonnées $(x;y)$.

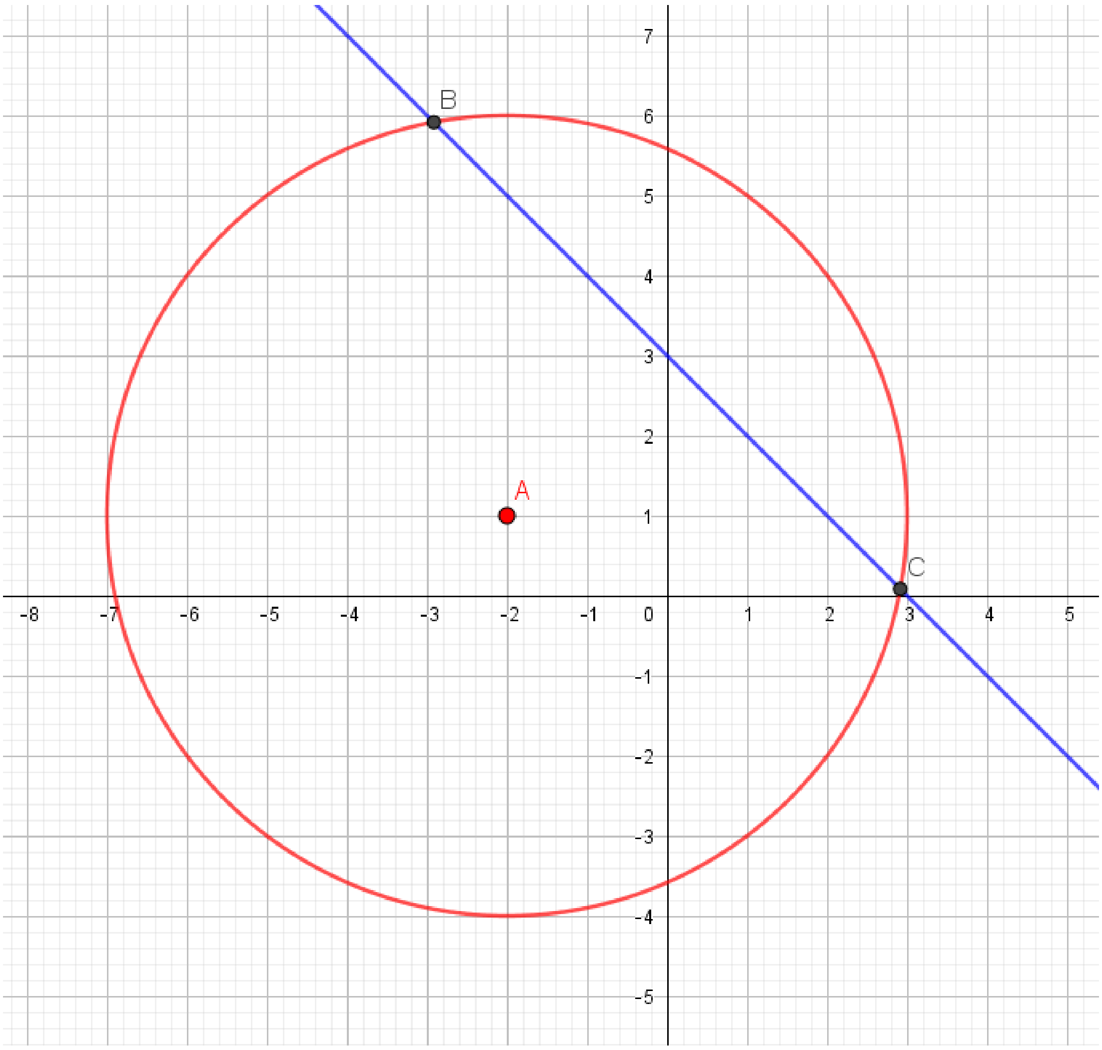
$$\begin{aligned}
M(x;y) \in \mathcal{C} &\iff AM = 5 \\
&\iff \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = 5 \\
&\iff (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = 25 \\
&\iff (x - (-2))^2 + (y-1)^2 = 25 \\
&\iff (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25
\end{aligned}$$

• Etudions l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x+3$.

$$\begin{aligned}
M(x;y) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} &\iff \left\{\begin{array}{lcl} M(x;y) & \in & \mathcal{C} \\ M(x;y) & \in & \mathcal{D} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} (x+2)^2 + (y-1)^2 & = & 25 \\ y & = & -x+3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} (x+2)^2 + (-x+3-1)^2 & = & 25 \\ y & = & -x+3 \end{array}\right. \quad \text{(par substitution)} \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} (x+2)^2 + (-x+2)^2 & = & 25 \\ y & = & -x+3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4 & = & 25 \\ y & = & -x+3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} 2x^2 & = & 17 \\ y & = & -x+3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x^2 & = & \frac{17}{2} \\ y & = & -x+3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \pm\sqrt{\frac{17}{2}} \\ y & = & -x+3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En conclusion, l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x+3$ est constituée des

deux points $B(s; -s+3)$ et $C(s'; -s'+3)$ avec $s = -\sqrt{\frac{17}{2}} \sim -2,92$ et $s' = \sqrt{\frac{17}{2}} \sim 2,92$.
Vérification graphique.



Exercice 4

Ecrire une fonction Python $f(a, b, c)$ à trois variables a, b, c qui renvoie, sous forme de liste, les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Corrigé Exercice 4

```python
from math import *

def f(a,b,c):
  d=b**2-4*a*c # calcul discriminant
  x=-b/(2*a) # calcul abscisse sommet
  y=-d/(4*a) # calcul ordonnee sommet
  return [x,y]
```